Tema 4. Cálculo deductivo en lógica proposicional

a) Deducción y reglas de inferencia

"Al igual que cualquier otro arte, la Ciencia de la Deducción y el Análisis sólo puede dominarse a través del estudio prolongado y paciente, y no es la vida tan larga como para que ningún mortal alcance en ello el mayor grado posible de perfección"

Sherlock Holmes
en *Estudio en Escarlata* (A. Conan Doyle)

Qué es una deducción: un juego de lógica

- Se ha robado un importante botín. El criminal (o criminales) se dio a la fuga en un coche. Scotland Yard decide interrogar a tres sospechosos, Andy, Bill y Carl, y consigue determinar los hechos siguientes:
- (i) En el robo no está implicada ninguna otra persona salvo A, B o C.
- (ii) C nunca trabaja sin llevar a A (y es posible que otros) como cómplice.
- (iii) B no sabe conducir.

¿ES ANDY CULPABLE O INOCENTE?

Qué es una deducción: un juego de lógica

- En juegos como éste se nos pide que *deduzcamos* la información que se pide a partir de la información dada.

- En este caso la información que se pide es determinar si A es culpable.

- Veamos un par de modos típicos de razonar para intentar resolver el juego:

Qué es una deducción: un juego de lógica

1) "Supongamos que A es inocente"
    2) Dado que C nunca trabaja sin A, si A es inocente, C debe ser también inocente
    3) Dado que el criminal huyó en coche y que B no sabe conducir, B no pudo cometer el robo solo: tuvo que ir con A o con C. Así que si A y C son inocentes, B también es inocente.
    4) Así que si A es inocente, también lo son B y C. Pero sabemos que *al menos uno es culpable*
5) Por tanto, no puede ser que A sea inocente

Qué es una deducción: un juego de lógica

1’) Tenemos 3 posibilidades: A, B o C.

2’) Si A lo hizo, A es culpable.

3’) Si C lo hizo, lo hizo con A, así que A también sería culpable en este caso

4’) Si B lo hizo, lo hizo con A o con C:

-si lo hizo con A, A es culpable

-si lo hizo con C, entonces (por 3’) también lo hizo con A, así que A es culpable

5’) Por tanto, A es culpable en cualquier caso

Qué es una deducción

- En una deducción progresamos a partir de la información conocida, hasta alcanzar cierta información desconocida que nos interesa obtener

- La información conocida actúa como las *premisas* de un argumento, y la desconocida como la *conclusión*

- Lo que caracteriza que una deducción esté bien hecha es que cada paso que demos sea seguro: cada nueva información debe *seguirse de* las anteriores

Qué es una deducción: Reglas

- Es posible captar por medio de *reglas* los pasos más típicos que efectuamos cuando llevamos a cabo una deducción

- Si una regla está bien elegida, nos conducirá desde cierto enunciado E a otro E' que es consecuencia lógica de E

- El proceso por el que pasamos de E a E' es una *inferencia lógica* y la regla que da cuenta de dicho paso es una *regla de inferencia*

Qué es una deducción: Reglas

- Hay reglas que intentan captar el "modo natural" de proceder cuando razonamos. Al sistema que se basa en tales reglas lo llamamos *cálculo de deducción natural*

- La idea es recoger y sistematizar las reglas informales que aplicamos, v.g., en razonamientos como el del juego

- Una vez formuladas de manera abstracta, podremos también aplicar las reglas a nuestras fórmulas de L_0, de manera que podamos saber cómo obtener unas fórmulas a partir de otras

Reglas de inferencia primitivas

- Vamos a ver un conjunto de reglas de inferencia básicas o *primitivas* para la deducción natural
- Dado que tenemos 5 conectivas, vamos a definir dos reglas relacionadas con cada una de ellas, una de *introducción* de la conectiva, y otra para su *eliminación*
- Las presentaremos primero de manera informal, para caracterizarlas después de modo más formal

Introducción del Conyuntor: IC

- *Premisas*:

1. El asesino es zurdo
2. El asesino calza un 45

- *Conclusión*:

3. El asesino es zurdo Y calza un 45.

Introducción del Conyuntor: IC

α	p	$q \rightarrow p$
β	$\neg(r \vee q)$	$\neg r \vee q$
$\overline{\alpha \wedge \beta}$	$\overline{p \wedge \neg(r \vee q)}$	$\overline{(q \rightarrow p) \wedge (\neg r \vee q)}$

Eliminación del Conyuntor: EC

- *Premisa*:

1. El asesino es bizco y usa bombín

- *Conclusión*:

2. El asesino es bizco

o bien:

2’. El asesino usa bombín

Eliminación del Conyuntor: EC

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

$$\frac{r \wedge (p \leftrightarrow \neg q)}{r} \qquad \frac{r \wedge (p \leftrightarrow \neg q)}{p \leftrightarrow \neg q}$$

Doble Negación: DN

- *Premisa*:

1. No es el caso que el asesino no fume en pipa

- *Conclusión*:

2. El asesino fuma en pipa

- *Premisa*:

1. El asesino tiene bigote

- *Conclusión*:

2. No es el caso que el asesino no tenga bigote

Doble Negación: DN

$$\frac{\neg\neg\, \alpha}{\alpha} \qquad \frac{\alpha}{\neg\neg\, \alpha}$$

¡CUIDADO!

$$\frac{\neg\neg\, (r \to q)}{r \to q} \qquad \frac{r \to q}{\neg\neg\, (r \to q)} \qquad \frac{\neg(\neg r \to q)}{r \to q}$$

Introducción del Disyuntor: ID

- *Premisa*:

1. El asesino mide 1,90m

- *Conclusión*:

2. El asesino mide 1,90m o veranea en Cancún

2’. El asesino veranea en Cancún o mide 1,90m

Introducción del Disyuntor: ID

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \qquad \frac{\alpha}{\beta \vee \alpha}$$

$$\frac{p}{p \vee r} \qquad \frac{p \leftrightarrow \neg q}{(r \to t) \vee (p \leftrightarrow \neg q)}$$

Eliminación del Disyuntor: ED (también *Prueba por Casos* o *Dilema*)

1. El asesino huyó en coche o en patinete
2. Si huyó en coche, se esconde en Cádiz
3. Si huyó en patinete, se esconde en Cádiz

Conclusión:

4. El asesino se esconde en Cádiz

Eliminación del Disyuntor: ED

$\alpha \vee \beta$	$r \vee \neg q$	$p \vee (r \to q)$
$\alpha \to \gamma$	$r \to (s \wedge t)$	$p \to \neg q$
$\beta \to \gamma$	$\neg q \to (s \wedge t)$	$(r \to q) \to \neg q$
________	________	________
γ	$s \wedge t$	$\neg q$

Eliminación del Condicional o Modus Ponens: MP

- *Premisas*:

1. Si Gutiérrez es culpable, Fefa le encubre
2. Gutiérrez es culpable

- *Conclusión*:

3. Fefa encubre a Gutiérrez

Modus Ponens: MP

$$\begin{array}{l} \alpha \to \beta \\ \alpha \\ \hline \beta \end{array} \qquad \begin{array}{l} (p \wedge q) \to \neg s \\ p \wedge q \\ \hline \neg s \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \neg(p \to (\neg r \to q)) \to (s \leftrightarrow \neg q) \\ \neg(p \to (\neg r \to q)) \\ \hline s \leftrightarrow \neg q \end{array}$$

Introducción del Bicondicional: IB

- *Premisas*:

1. Si el asesino es calvo, entonces bebe vodka
2. Si el asesino bebe vodka, entonces es calvo

- *Conclusión*:

3. El asesino es calvo si, y sólo si, bebe vodka

Introducción del Bicondicional: IB

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha \to \beta \\ \beta \to \alpha\end{array}}{\alpha \leftrightarrow \beta} \qquad \frac{\begin{array}{l}r \to \neg\neg q \\ \neg\neg q \to r\end{array}}{r \leftrightarrow \neg\neg q} \qquad \frac{\begin{array}{l}(p \vee r) \to \neg(q \to p) \\ \neg(q \to p) \to (p \vee r)\end{array}}{(p \vee r) \leftrightarrow \neg(q \to p)}$$

Eliminación del Bicondicional: EB

- *Premisa*:

1. Gutiérrez es culpable si, y sólo si, ama a Fefa

- *Conclusión*:

2. Si Gutiérrez es culpable, entonces ama a Fefa

o bien:

2'. Si Gutiérrez ama a Fefa, entonces es culpable

Eliminación del Bicondicional: EB

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \qquad \frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta \rightarrow \alpha} \qquad \frac{(p \vee \neg p) \leftrightarrow q}{(p \vee \neg p) \rightarrow q} \qquad \frac{(p \vee \neg p) \leftrightarrow q}{q \rightarrow (p \vee \neg p)}$$

Premisas y supuestos

- Las premisas corresponden a la información que nos viene *dada* de antemano (los datos del problema o las fórmulas iniciales)
- A veces tenemos que introducir información hipotética para echar a andar un razonamiento: a esto que introducimos lo llamamos *supuesto*
- Equivale a las ocasiones en que razonamos comenzando "Supongamos que..."
- Hay 2 reglas de inferencia que se basan en el empleo de supuestos:

Reducción al Absurdo: RA

- *Supuesto*:

⎡ (Supongamos que) el asesino no huyó a Cádiz

|

| ...bla bla bla... (*cadena de inferencias válidas*)

|

⎣ Gutiérrez es dentista y no es dentista

- *Conclusión*:

1. El asesino huyó a Cádiz

Reducción al Absurdo: RA

- En la RA comenzamos por introducir un supuesto, (que corresponde a *la negación de aquello que intentamos concluir)*
- Para señalar que se trata de un supuesto y no de una premisa, usamos el símbolo ⌈ (abrir hipótesis)
- A continuación seguimos la deducción aplicando las reglas de inferencia que sea conveniente
- SI alcanzamos una contradicción, significa que nuestro supuesto inicial era erróneo. Al llegar a la contradicción, cerramos la cadena de inferencias con el símbolo ⌊ (cancelar hipótesis).
- La conclusión será ***<u>la negación del supuesto</u>***

Reducción al Absurdo: RA

$$\begin{array}{|l} \alpha \\ \ldots \\ \beta \wedge \neg \beta \end{array}$$

$$\overline{\neg \alpha}$$

demuéstrese p desde $(\neg p \leftrightarrow q)$ y $\neg q$

1.	$\neg p \leftrightarrow q$	Premisa
2.	$\neg q$	Premisa
	3. $\neg p$	(hipótesis)
	4. $\neg p \rightarrow q$	EB 1
	5. q	MP 3, 4
	6. $q \wedge \neg q$	IC 2, 5
7.	$\neg\neg p$	RA 3-6
8.	p	DN 7

Introducción del Condicional: Icd (también *Teorema de Deducción*)

- *Supuesto*:

(*supongamos* que) La víctima fue envenenada

... bla bla bla ... (*cadena de inferencias válidas*)

El asesino es la condesa Lecquia

- *Conclusión*:

1. Si la víctima fue envenenada, el asesino es la condesa Lecquia

Introducción del Condicional: Icd

- Aquí también introducimos un supuesto. Seguimos con la deducción aplicando las reglas que sea conveniente y llegamos a determinado enunciado.
- Nuestra conclusión NO ES ESTE ENUNCIADO.
- **La conclusión es un condicional**, que tiene *como antecedente el supuesto* que hemos introducido y *como consecuente el enunciado* que hemos obtenido a partir de ese supuesto, aplicando reglas de inferencia

Introducción del Condicional: Icd

$$\frac{\begin{array}{|l} \alpha \\ \ldots \\ \beta \end{array}}{\alpha \to \beta}$$

Demuéstrese $(\neg q \to \neg r)$

desde $\neg q \to (p \wedge \neg r)$

1. $\neg q \to (p \wedge \neg r)$ Premisa
2. $\neg q$ (hipótesis)
3. $p \wedge \neg r$ MP 1, 2
4. $\neg r$ EC 3
5. $\neg q \to \neg r$ ICd 2-4

Derivación y deducción

- Normalmente nos interesa saber si una fórmula β se puede obtener desde otras $\alpha_{1\ \ldots}\ \alpha_n$ En ese caso lo que tenemos que construir es una *derivación* desde $\alpha_{1\ \ldots}\ \alpha_n$ hasta β, de manera que en cada paso de la derivación apliquemos una regla de inferencia.

- Si conseguimos obtener β, diremos que hemos *deducido* β de $\alpha_{1\ \ldots}\ \alpha_n$

Procedimiento de deducción

1. Se determina cuáles son las premisas y se escribe cada premisa en una línea numerada, comenzando por el 1
2. Se determina cuál es la conclusión, y se deja aparte, marcada con el símbolo |–. Esto es lo queremos demostrar
3. Se aplican reglas de inferencia sobre las premisas y se van derivando nuevas líneas, que se van numerando
4. La deducción termina cuando llegamos a una línea, ***fuera de toda barra de hipótesis*** (de la RA o la ICd) que contiene lo que queremos demostrar

Ejemplo de deducción

Demostrar $r \vee s$ desde $\{q \rightarrow r, p \rightarrow s, q \vee p\}$

1.	$q \rightarrow r$	Pr	
2.	$p \rightarrow s$	Pr	Colocamos las premisas numeradas
3.	$q \vee p$	Pr	
⌈4.	q	hip	
| 5.	r	MP 1, 4	Junto a cada línea escribimos la regla empleada y las líneas a las que se ha aplicado: MP 1, 4 significa que se aplicó *Modus Ponens entre 1 y 4*
...			

Ejemplo de deducción

Demostrar $r \vee s$ desde $\{q \rightarrow r, p \rightarrow s, q \vee p\}$

1.	$q \rightarrow r$	Pr
2.	$p \rightarrow s$	Pr
3.	$q \vee p$	Pr
4.	q	hip
5.	r	MP 1, 4
6.	$r \vee s$	ID 5
7.	$q \rightarrow (r \vee s)$	ICd 4-6
...		

Aunque en la línea 6 ya aparece lo que queremos demostrar, está dentro de una barra abierta por una hipótesis, así que no nos sirve como conclusión. Pero podemos cerrar la barra con la regla de Introducción del Condicional.

Ejemplo de deducción

Demostrar $r \vee s$ desde $\{q \rightarrow r, p \rightarrow s, q \vee p\}$

1.	$q \rightarrow r$	Pr
2.	$p \rightarrow s$	Pr
3.	$q \vee p$	Pr
⌈4.	q	hip
|5.	r	MP 1, 4
⌊6.	$r \vee s$	ID 5
7.	$q \rightarrow (r \vee s)$	ICd 4-6
⌈8.	p	hip
|9.	s	MP 2, 8
⌊10.	$r \vee s$	ID 9
11.	$p \rightarrow (r \vee s)$	ICd 8-10
12.	$r \vee s$	ED 3, 7, 11

Podemos introducir todas las hipótesis que necesitemos, pero la deducción no termina hasta obtener lo deseado *fuera de las barras de hipótesis*.

Las fórmulas obtenidas en las líneas 7 y 11 están fuera de dichas barras, así que podemos combinarlas sin problemas con la premisa conveniente, en este caso la línea 3.

Concluimos la deducción aplicando la Eliminación de la Disyunción en esas tres líneas.

Regla auxiliar: Repetición

- Podemos repetir cualquier línea ya obtenida, siempre y cuando no la saquemos ilegalmente fuera de unas barras (pero siempre podemos meterla *dentro*):

$\vdash p \rightarrow q$

1.	$(p \wedge p) \rightarrow q$	Pr
2.	p	hip
3.	p	Rep 2
4.	$p \wedge p$	IC 2, 3
5.	q	MP 1, 4
6.	$p \rightarrow q$	ICd 2-5

$\vdash p \vee q$

1.	p	hip
2.	$p \vee q$	ID 1
3.	$p \vee q$	Rep 2 ??

Reglas derivadas

- Las reglas de inferencia primitivas son suficientes para hacer todas las derivaciones que queremos
- Pero a veces nos encontramos con secuencias de pasos que se repiten muy a menudo y que podemos abreviar en forma de regla
- Estas reglas están derivadas de las primitivas, en el sentido de que lo que ellas hacen podría hacerse igualmente sólo con reglas primitivas, aunque de manera más larga.
- Al igual que ocurre respecto al número de conectivas, se trata de encontrar un equilibrio en una cantidad de reglas que sea manejable pero suficiente para nuestros fines

Reglas de simetría

Disyuntor: SD	Conyuntor: SC	Bicondicional:SB
$\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
$\overline{}$	$\overline{}$	$\overline{}$
$\beta \vee \alpha$	$\beta \wedge \alpha$	$\beta \leftrightarrow \alpha$

Se explican por sí solas y su demostración desde las reglas primitivas es muy sencilla

Modus Tollens: MT

$\alpha \to \beta$	Si el crimen fue en la sala, fue con el puñal
$\neg \beta$	El crimen no fue con el puñal
$\neg\alpha$	El crimen no fue en la sala

Es la recíproca del Ponens y se demuestra fácilmente con la ayuda de éste y la Reducción al Absurdo:

1.	$p \to q$	Pr
2.	$\neg q$	Pr
3.	p	hip.
4.	q	MP 1, 3
5.	$q \wedge \neg q$	IC 2, 4
6.	$\neg p$	RA 3-5

Eliminación del Disyuntor por Negación: EDN (tb *Silogismo Disyuntivo* o *Tollendo Ponens*)

$\alpha \vee \beta$	El asesino es Rómulo o Remo
$\neg\alpha$	El asesino no es Rómulo
$\overline{}$	
β	El asesino es Remo

Su demostración es interesante para ver las virtudes de la contradicción, así como Reducciones al Absurdo “anidadas”:

Eliminación del Disyuntor por Negación: EDN

1. $p \vee q$	Pr
2. $\neg p$	Pr
⌈3. p	hip
| 4. $p \wedge \neg p$	IC 2, 3
| ⌈5. $\neg q$	hip
| ⌊ 6. $p \wedge \neg p$	Rep 4
| 7. $\neg\neg q$	RA 5-6
⌊ 8. q	DN 7
9. $p \rightarrow q$	ICd 3-8
⌈10. q	hip
⌊11. q	Rep 10
12. $q \rightarrow q$	ICd 10-11
13. q	ED 1, 9, 12

Queremos demostrar q desde $(p \vee q)$ y $\neg p$.
Al hacerlo, podemos ver en práctica el principio que dice que de una contradicción se sigue cualquier cosa (pasos 5-7). En este caso lo hemos explotado para nuestros fines, pero siempre siguiendo escrupulosamente las reglas de inferencia.
Nótese que en 7 podemos obtener la negación de *cualquier fórmula* α cuya negación pongamos en 5. Pero fuera de las barras (en 9) sólo obtendríamos $p \rightarrow \alpha$

Leyes de De Morgan

- Las equivalencias entre conyuntor, disyuntor y condicional pueden explotarse para obtener reglas de inferencia basadas en ellas.
- Estas equivalencias se conocen como leyes de De Morgan:

$$\alpha \wedge \beta \quad\equiv\quad \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \quad\equiv\quad \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$$

$$\alpha \vee \beta \quad\equiv\quad \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \quad\equiv\quad \neg\alpha \rightarrow \beta$$

$$\alpha \rightarrow \beta \quad\equiv\quad \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \quad\equiv\quad \neg\alpha \vee \beta$$

- Al demostrar las reglas, iremos empleando las primitivas y las derivadas ya demostradas

Negación del Disyuntor al Conyuntor: NDC

$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$$

$$\frac{\neg\alpha \wedge \neg\beta}{\neg(\alpha \vee \beta)}$$

1. $\neg(p \vee q)$	Pr
⎡2. p	hip
⎢3. $p \vee q$	ID 2
⎣4. $(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	IC 1, 3
5. $\neg p$	RA 2-4
⎡6. q	hip
⎢7. $p \vee q$	ID 6
⎣8. $(p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$	IC 1, 7
9. $\neg q$	RA 6-8
10. $\neg p \wedge \neg q$	IC 5, 9

Negación del Disyuntor al Conyuntor: NDC

$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$$

$$\frac{\neg\alpha \wedge \neg\beta}{\neg(\alpha \vee \beta)}$$

1. $\neg p \wedge \neg q$	Pr
2. $p \vee q$	hip
3. $\neg p$	EC 1
4. q	EDN 2, 3
5. $\neg q$	EC 1
6. $q \wedge \neg q$	IC 4, 5
10. $\neg(p \vee q)$	RA 2-6

Definición del Condicional por el Disyuntor: DCD

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\neg\alpha \vee \beta}$$

$$\frac{\neg\alpha \vee \beta}{\alpha \rightarrow \beta}$$

1. $p \rightarrow q$	Pr
2. $\neg(\neg p \vee q)$	hip
3. $\neg\neg p \wedge \neg q$	NDC 2
4. $\neg\neg p$	EC 3
5. p	DN 4
6. q	MP 1, 5
7. $\neg q$	EC 3
8. $q \wedge \neg q$	IC 6, 7
9. $\neg p \vee q$	RA 2-8

Definición del Condicional por el Disyuntor: DCD

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\neg\alpha \vee \beta}$$

1. $\neg p \vee q$	Pr
2. p	hip
3. $\neg\neg p$	DN 2
4. q	EDN 1, 3
5. $p \rightarrow q$	ICd 2-4

$$\frac{\neg\alpha \vee \beta}{\alpha \rightarrow \beta}$$

Negación del Conyuntor al Disyuntor: NCD

$$\frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}$$

$$\frac{\neg\alpha \vee \neg\beta}{\neg(\alpha \wedge \beta)}$$

1.	$\neg(p \wedge q)$	Pr
2.	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	hip
3.	$\neg\neg p \wedge \neg\neg q$	NDC 2
4.	$\neg\neg p$	EC 3
5.	$\neg\neg q$	EC 3
6.	p	DN 4
7.	q	DN 5
8.	$p \wedge q$	IC 6,7
9.	$(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge q)$	IC 1, 8
10.	$\neg p \vee \neg q$	RA 2-6

Negación del Conyuntor al Disyuntor: NCD

$$\frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}$$

$$\frac{\neg\alpha \vee \neg\beta}{\neg(\alpha \wedge \beta)}$$

Queda como ejercicio la demostración en la dirección opuesta

Negación del Condicional al Conyuntor: NCC

$$\frac{\neg(\alpha \to \beta)}{\alpha \wedge \neg\beta}$$

Quedan como ejercicio las dos demostraciones

$$\frac{\alpha \wedge \neg\beta}{\neg(\alpha \to \beta)}$$